





































































Onde,

$\sigma_{t-1}$  é a volatilidade até o instante  $t - 1$ ;

$\mu_{t-1}$  é a média dos retornos calculados até o instante  $t - 1$ ;

$r_{t-1}$  é o retorno calculado no instante  $t - 1$ ;

$\lambda$  é o fator de decaimento.

O fato de que a estimativa da variância do período depende da variância do período anterior é consistente com a afirmação de que existe autocorrelação nos quadrados dos retornos.

Para o cálculo das covariâncias, é possível generalizar a fórmula acima para:

$$Cov_t(x_i, x_j) = \sqrt{\lambda Cov_{t-1}^2(x_i, x_j) + (1 - \lambda)(r_{x_i} - \mu_{x_i})_{t-1}(r_{x_j} - \mu_{x_j})_{t-1}}$$

Onde,

$Cov_{t-1}(x_i, x_j)$  é a covariância de  $x_i, y_j$  até o instante  $t - 1$ ;

$\mu_{t-1}$  é a média dos retornos de  $x_i$ ;

$r_{x_i}$  é o retorno de  $x_i$ ;

$(r_{x_i} - \mu_{x_i})_{t-1}$  é o retorno menos a média de  $x_i$  calculado até o instante  $t$ ;

$\lambda$  é o fator de decaimento.

Desta forma, é possível simplificar a matriz de covariâncias  $\Sigma$  do modelo Riskmetrics™ através a notação matricial:

$$\Sigma_t = \lambda \Sigma_{t-1} + (1 - \lambda)(R_{t-1} - \mu_{t-1})'(R_{t-1} - \mu_{t-1})$$

Conforme destacado por Alexander (2008), a estimação de volatilidade pelo modelo EWMA (RiskMetrics™) reagirá imediatamente após um retorno incomum, em seguida este efeito do retorno incomum gradualmente diminui ao longo do tempo.

O nível de reação da volatilidade aos eventos de mercado é determinado pela constante  $\lambda$  (lambda). Quanto maior  $\lambda$ , maior o peso atribuído às observações mais antigas, e mais

suaves são as oscilações. Assim,  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) é o fator de decaimento e determina os pesos relativos aplicados às observações dos retornos e a efetiva quantidade de dados usada na estimativa da volatilidade, desta forma, quanto menor  $\lambda$ , maior o peso dos dados mais recentes. O manual do RiskMetrics™ recomenda o uso de um  $\lambda$  padrão. Para chegar a esse número, calculou-se o  $\lambda$  para 480 séries temporais, obtendo-se uma média ponderada dos fatores de decaimento ótimos obtidos. O resultado foi 0,94 para volatilidades e correlações diárias e 0,97 para volatilidades e correlações mensais.

## 2.4 OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS

Segundo Brandimarte (2002), a gestão de carteiras de investimentos é uma aplicação já antiga dos métodos de otimização. Conforme anteriormente mencionado, após o trabalho de Markowitz publicado em 1952, as propostas de otimização de carteiras passaram a ser orientadas a partir da relação de risco e retorno.

Genericamente, os problemas de otimização encontrados na gestão de portfólios de investimentos tomam a seguinte forma: Otimizar uma medida de performance sujeito a restrições operacionais e a restrição de um limite máximo de risco.

Desta forma, esta seção do trabalho buscará descrever três modelos alternativos para otimização de carteiras de investimentos. Inicialmente será abordado o modelo de otimização por média-variância clássico, onde o procedimento adotado será o de encontrar uma composição que minimize o risco (variância) da carteira para um dado retorno futuro.

O segundo modelo adotado no trabalho será o de otimização por mínima-variância, que pode ser definido como um caso particular do modelo de média-variância. Este procedimento de otimização busca atribuir pesos para os ativos de forma a auferir o máximo ganho de diversificação e, conseqüentemente, a carteira ótima será a de menor volatilidade.

O terceiro modelo será uma adaptação da otimização por média-variância, no qual será pré-estabelecido um intervalo com limites máximo e mínimo para a volatilidade da carteira. O intuito será criar um modelo que otimize uma carteira com variância razoavelmente estável ao longo do tempo.

### 2.4.1 O modelo de média-variância

Segundo Santos (2010), a ideia adjacente à teoria da otimização por média-variância proposta por Markowitz é que indivíduos decidem suas opções de alocação baseados no dilema fundamental entre retorno esperado e risco. Baseados nesse arcabouço teórico, indivíduos optarão por portfólios que estejam localizados na fronteira-eficiente, que definem o conjunto de carteiras eficientes. Assim, um portfólio eficiente é aquele que maximiza o retorno esperado para um determinado nível de risco.

É importante compreender que, ao calcular carteiras ótimas por média-variância, a escolha do nível de risco desejado depende da tolerância ao risco do investidor. Assim, investidores com maior aversão ao risco optarão por uma composição que ofereça menor volatilidade, penalizando performance.

Matematicamente, é possível tratar o modelo como um problema de minimização do risco para um dado retorno futuro, ou maximização do retorno esperado para uma dada variância. Embora sejam soluções equivalentes, nesse trabalho será utilizada a primeira opção, assim como em Santos (2010).

Assim, considerando a existência de  $N$  ativos com risco, com um vetor de retornos aleatórios  $R_{t+1}$  e um ativo livre de risco com retornos conhecidos  $R_t^f$  e definindo o excesso de retorno  $r_{t+1} = R_{t+1} - R_t^f$ , a média (retorno esperado) como  $\mu_t$  e a matriz de covariâncias como  $\Sigma_t$ , o problema de escolha da carteira pode ser definido como:

$$\min_x w' \Sigma w - \frac{1}{\lambda} E[r_{p,t+1}]$$

Sujeito a:

$$1'w = 1$$

Onde  $\lambda$  é uma constante relativa ao nível de aversão ao risco,  $w$  é o vetor de pesos dos ativos da carteira e  $\iota$  é o vetor unitário. Para a aplicação do modelo optou-se por utilizar  $\lambda = 1$ .

Ainda neste trabalho será incluída uma restrição de venda a descoberto:

$$w_i \geq 0$$

Esta restrição na formulação do problema, além de conveniente para aplicações práticas, pode melhorar a estabilidade dos pesos dos ativos ao longo do tempo (JAGANNATHAN; MA apud SANTOS, 2010).

#### 2.4.2 O modelo de mínima-variância

A carteira de mínima-variância corresponde a um caso específico da otimização por média-variância, sendo especificamente a opção com menor risco entre todas as carteiras eficientes. Desta forma, a carteira de mínima-variância corresponde à carteira de média-variância com parâmetro infinito de aversão ao risco.

Matematicamente, define-se o problema da seguinte maneira:

$$\min_x w' \Sigma w$$

Sujeito a:

$$\iota' w = 1$$

$$w_i \geq 0$$

É importante salientar que a carteira MV possui propriedades interessantes. Jagannathan e Ma (apud Santos, 2010) afirmam que o modelo possui menor erro de estimação já que o erro de estimação das covariâncias é menor que o das médias e, por definição, a carteira MV é independente do retorno esperado.

Há ainda evidências empíricas de que este modelo possui melhor performance “fora da amostra” do que quaisquer outros portfólios de média-variância, mesmo quando é utilizado o índice de Sharpe ou outra medida de performance que utiliza na sua fórmula a média e a variância na comparação.(DEMIGUEL; NOGALES apud SANTOS, 2010).

Embora estudos acadêmicos empíricos e teóricos tenham contemplado vários aspectos da otimização por média-variância, as aplicações práticas na vida real tem se direcionado para as carteiras de mínima-variância. Bausys (2009) cita um artigo publicado em 15 de setembro de 2008 no *Financial Times* que demonstra que um número expressivo de empresas de Asset Management nos Estados Unidos tinha como base estratégica de alocação apenas a otimização por mínima-variância, enquanto não havia sequer um gestor que utilizava qualquer outra estratégia baseada unicamente no conceito de média-variância.

#### 2.4.3 O modelo de bandas de variância

Ao contrário dos modelos anteriores, em que é apenas possível otimizar a carteira de investimento considerando o risco ou retorno do instante de tempo final, é possível definir um modelo com restrições intermediárias que considera também um intervalo de variância aceitável (bandas de variância) indicado pelo próprio modelo. Esta alternativa pode ser considerada uma adaptação do modelo de média-variância com restrições intermediárias, proposto por Nabholz (2006).

Esta proposta surge da constatação no dia-a-dia em uma empresa de gestão de recursos, onde é possível observar a preferência dos investidores por produtos, em especial fundos multimercados, que apresentem variância ativamente controlada, sem atingir picos nos momentos de crise. Essa característica pode trazer benefícios para clientes institucionais e fundos de fundos que trabalham com orçamento de risco em suas carteiras, por permitir um controle mais efetivo, uma vez que estas carteiras não são rebalanceadas com muita frequência.

Através desse problema é possível otimizar uma carteira com maior estabilidade em relação à variância, o que evitaria uma elevação brusca do risco em momentos de stress dos mercados. Reduz-se assim a possibilidade de perdas indesejadas, independentemente de momentos de crise ou turbulências.

Segundo Nabholz (2006), a grande vantagem desse tipo de modelagem é permitir que a variância da carteira ao longo de todo o horizonte de análise possa ser controlada e, ao mesmo tempo impedir que os níveis de volatilidade atinjam valores indesejáveis.

É possível definir o problema de otimização da seguinte maneira:

$$\max_x \mu'w$$

Sujeito a:

$$1'w = 1$$

$$w_i \geq 0$$

$$\textit{Limite inferior} \leq x'\Sigma x \leq \textit{limite superior}$$

Onde o limite inferior é dado pelo portfólio de mínima variância.

Para a aplicação prática neste trabalho, utilizou-se como limite superior de variância estimada 0,10, em base diária.

### 3 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS E RESULTADOS OBTIDOS

Este capítulo tem com objetivo apresentar os procedimentos e os resultados obtidos para que se possa chegar às conclusões finais da pesquisa.

Inicialmente serão descritos os dados utilizados, bem como as ferramentas aplicadas. Em seguida, serão expostos os resultados obtidos com as estimações dos modelos.

#### 3.1 DADOS E FERRAMENTAS UTILIZADAS

##### 3.1.1 Descrição dos dados utilizados

Os dados aplicados na estimação dos modelos são de cotações de ativos e índices representativos das classes de ativos mais utilizados pelos gestores brasileiros, abrangendo ativos de renda fixa, moedas, renda variável e *commodities*.

Foram utilizados 5 anos de cotações diárias dos ativos entre os dias 02/01/2006 e 30/12/2010, totalizando 1254 observações.

O quadro 1 apresenta a lista com os 24 ativos selecionados. Foram selecionados ativos e índices representativos de ativos com boa liquidez e de forma segmentada, a fim de que fosse possível obter baixas correlações, e conseqüentemente ganhos de diversificação.

As séries históricas dos ativos foram obtidas através dos sistemas de gestão de risco e análise Quantum-Axis e Mitra-Riscos que utilizam como fonte primária terminais Bloomberg, e as bases de dados da BVMF-Bovespa e ANBIMA.

Apenas no caso das cotações do Petróleo foi necessária a interpolação de dados, em virtude de diferentes calendários de negociação. Também para este ativo, foi necessária sua conversão para a moeda local, já que na aplicação dos modelos foi suposta a negociação em Real (R\$).

No quadro 2 encontram-se as estatísticas descritivas das séries utilizadas.

Ativo/Índice	Descrição	Classe de Risco	Moeda
CDI	Taxa média dos Certificados de Depósitos Interbancários, divulgada pela CETIP	Ativo livre de risco	BRL
IENE_SPOT	Moeda Japonesa - Iene	Moedas	BRL
EURO_SPOT	Moeda europeia - Euro		BRL
DOLAR_SPOT	Moeda americana - Dólar		BRL
IVBX-2	Índice constituído por 50 papéis emitidos por empresas classificadas a partir da 11ª posição em termos de valor de mercado e liquidez. Representa as ações com capitalização mediana.	Ações	BRL
IBOVESPA	Índice constituído por papéis que representam conjuntamente 80% do volume transacionado à vista nos 12 meses precedentes à formação da carteira teórica. Representa as ações com maior capitalização do mercado brasileiro.		BRL
SMLL	Índice criado para medir o comportamento das empresas de modo segmentado. Representa o retorno de uma carteira composta por empresas de menor capitalização.		BRL
IDkA IPCA 10 Anos	Índices de Duração Constante ANBIMA IPCA. Medem o comportamento de carteiras sintéticas de títulos públicos federais indexados ao IPCA (NTN-B) com prazo constante.	Renda Fixa IPCA	BRL
IDkA IPCA 2 Anos			BRL
IDkA IPCA 3 Anos			BRL
IDkA IPCA 5 Anos			BRL
IDkA Pré 1 Ano	Índices de Duração Constante ANBIMA Pré. Medem o comportamento de carteiras sintéticas de títulos públicos federais prefixados (LTN e NTN-F) com prazo constante.	Renda Fixa Prefixado	BRL
IDkA Pré 2 Anos			BRL
IDkA Pré 3 Anos			BRL
IDkA Pré 3 Meses			BRL
IDkA Pré 5 Anos			BRL
AÇÚCAR	Commodities - Açúcar	Commodities	BRL
ALGODÃO	Commodities - Algodão		BRL
OURO	Commodities - Ouro		BRL
BOI	Commodities - Boi		BRL
MILHO	Commodities - Milho		BRL
SOJA	Commodities - Soja		BRL
CAFÉ	Commodities - Café		BRL
PETRÓLEO	Commodities - Petróleo		BRL

Quadro 1 - Descrição dos ativos utilizados na pesquisa.

Fonte: Elaboração própria

Ativo/Índice	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio-Padrão	C.V.	Enviesamento	Curtose Ex.
CDI	0,000443	0,000427	0,000324	0,000655	0,000081	0,182530	0,444330	-0,295380
IENE_SPOT	0,000133	-0,000277	-0,083763	0,106670	0,014657	110,590000	1,019900	9,977300
EURO_SPOT	-0,000121	-0,000429	-0,090932	0,097540	0,010587	87,460000	0,420690	13,461000
DOLAR_SPOT	-0,000205	-0,000537	-0,077586	0,076321	0,011475	55,866000	0,510910	8,115600
IVBX-2	0,000591	0,000536	-0,107440	0,148040	0,017944	30,348000	0,402170	8,663800
IBOVESPA	0,000795	0,001189	-0,113930	0,146590	0,020775	26,122000	0,241660	6,262600
SMLL	0,000864	0,000890	-0,102420	0,137550	0,017610	20,376000	-0,074605	8,247500
IDkA IPCA 10 Anos	0,000660	0,000704	-0,051519	0,040002	0,005644	8,553100	-0,666700	14,345000
IDkA IPCA 2 Anos	0,000569	0,000582	-0,011352	0,011003	0,001461	2,569400	-0,637010	12,269000
IDkA IPCA 3 Anos	0,000587	0,000618	-0,017120	0,016601	0,002344	3,992800	-0,641130	10,332000
IDkA IPCA 5 Anos	0,000604	0,000655	-0,026415	0,020888	0,003671	6,081100	-0,741150	9,968700
IDkA Pré 1 Anos	0,000512	0,000523	-0,010494	0,006322	0,000858	1,674800	-2,861300	43,603000
IDkA Pré 2 Anos	0,000555	0,000636	-0,026342	0,013675	0,002313	4,169900	-1,897000	27,172000
IDkA Pré 3 Anos	0,000585	0,000679	-0,038838	0,021729	0,003824	6,534700	-1,080200	17,122000
IDkA Pré 3 Meses	0,000453	0,000441	-0,000318	0,001420	0,000125	0,276170	0,642960	5,608700
IDkA Pré 5 Anos	0,000646	0,000742	-0,060292	0,039277	0,006855	10,617000	-0,448110	11,112000
AÇÚCAR	0,000430	0,000578	-0,059764	0,040310	0,007405	17,201000	-1,037900	9,955100
ALGODAO	0,000758	0,000084	-0,021797	0,031626	0,005538	7,302600	1,475000	6,236200
OURO	0,000757	0,000000	-0,143080	0,132040	0,017855	23,599000	0,114460	8,682400
BOI	0,000582	0,000372	-0,022036	0,029022	0,005235	8,997500	0,165960	3,479300
MILHO	0,000411	0,000000	-0,056180	0,078947	0,010119	24,603000	1,468000	11,984000
SOJA	0,000787	0,000604	-0,479550	0,956590	0,031998	40,660000	18,598000	674,070000
CAFE	0,000455	0,000389	-0,076161	0,062466	0,014028	30,835000	-0,237590	2,329100
PETROLEO	0,000364	0,000290	-0,096148	0,210190	0,025200	69,174000	0,898260	7,612300

**Quadro 2 - Estatística Descritiva dos ativos utilizados na pesquisa.**

Fonte: Elaboração própria

### 3.1.2 *Software e pacotes computacionais*

Para aplicação da metodologia de avaliação da performance fora-da-amostra dos modelos de otimização de carteiras, todas as simulações foram realizadas em um PC Intel CORE i5 com 4Gb RAM. Utilizou-se como ferramenta de cálculo o software MATLAB, aplicando-se o sistema CVX (GRANT; BOYD, 2008) para a solução dos problemas de otimização convexa.

Desta forma, inicialmente foram realizadas as estimações das médias e covariâncias usando uma janela móvel  $t = 250$  observações em base diária. Utilizando-se cada estimativa foi calculada uma carteira ótima para cada estratégia de otimização (média-variância, mínima-

variância e bandas de variância), sistematicamente adicionando um dado mais recente e excluindo-se o mais antigo até o fim do conjunto de  $L = 1254$  observações.

### 3.2 RESULTADOS

Segundo Santos (2010), matematicamente, manter o portfólio  $w_t$  proporciona um retorno fora-da-amostra no período  $t + 1$ :  $\hat{r}_{t+1} = w_t^T r_t$ , onde  $\hat{r}_{t+1}$  é o excesso de retorno em relação ao ativo livre de risco (neste trabalho, a média dos retornos dos Certificados de Depósitos Interfinanceiros).

Para avaliação da performance fora-da-amostra de cada carteira otimizada, após o cálculo dos  $(L - T)$  retornos em excesso, foram calculados a variância como *proxy* do risco da carteira, o Índice de Sharpe para avaliação do excesso de retorno ajustado ao risco e o *turnover* do portfólio, conforme segue:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{L - T} \sum_{t=T}^{L-1} w_t^T r_{t+1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} (w_t^T r_{t+1} - \hat{\mu})^2$$

$$\widehat{SR} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

$$Turnover = \frac{1}{L - T - 1} \sum_{t=T}^{L-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|)$$

Onde  $w_{j,t}$  é o peso do ativo  $j$  no portfolio antes do rebalanceamento e  $w_{j,t+1}$  é o peso desejado do ativo  $j$  no instante  $t + 1$ . Desta forma, o *turnover* do portfólio representa uma

medida de variabilidade nas posições da carteira e mede indiretamente os custos de transação que incidem sobre cada estratégia.

Para visualização do desempenho das estratégias e da estabilidade dos pesos, são ainda plotados gráficos de excesso de retornos acumulados e dos pesos dos ativos variando ao longo dos 1003 períodos calculados.

Para monitoramento dos resultados, foi ainda aplicada uma estratégia ingênua, na qual para cada ativo foi atribuído o peso  $1/N$ , com  $N = 24$  e corresponde ao número de ativos da carteira em que se retomam as proporções originais a cada período.

### 3.2.1 Excesso de retorno

As médias dos excessos de retorno para as diferentes estratégias e modelos de estimação da matriz de covariâncias são mostradas na tabela 1. Para ambos os modelos Amostral e RiskMetrics™, a estratégia de bandas de variância mostrou resultados significativamente superiores (0.0750 e 0.0359, respectivamente), seguidas, também em ambos os casos, pela estratégia de otimização por média-variância (0.0359 para o modelo Amostral e 0.0102 para o modelo RiskMetrics™). A estratégia ingênua de alocação e a otimização por mínima-variância obtiveram resultados próximos de zero ou negativos, mostrando médias de excesso de retorno pouco expressivas.

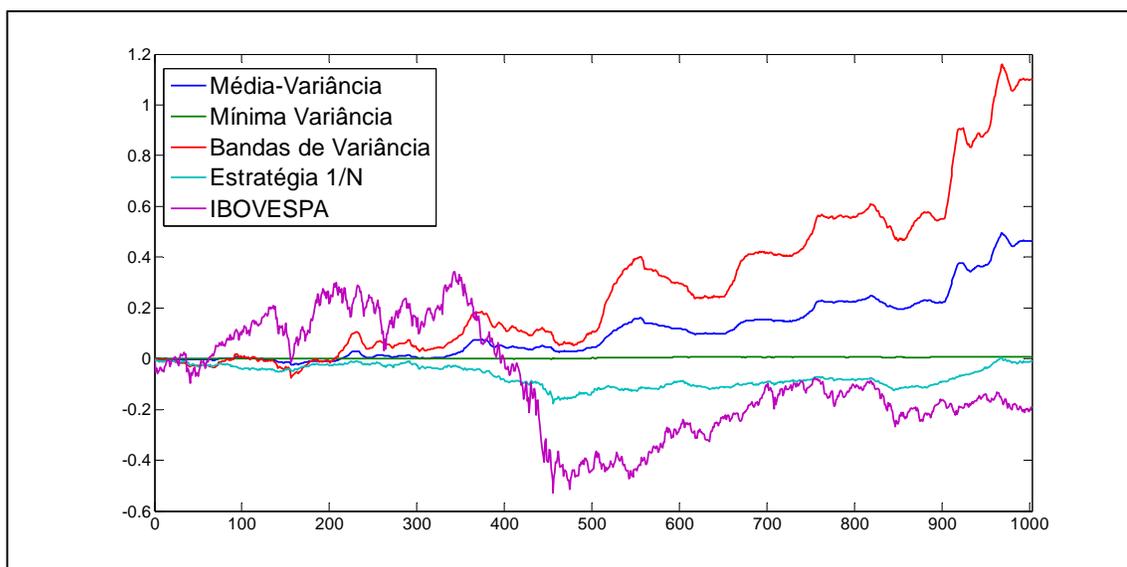
**Tabela 1– Média do excesso de retorno para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

Excesso de Retorno	Matriz de Covariâncias	
	Amostral	RiskMetrics™
<b>Markowitz (média-variância)</b>	0.0359	0.0102
<b>Mínima-Variância</b>	0.0006	-0.0094
<b>Bandas de Variância</b>	0.0750	0.0359
<b>1/N</b>	-0.0005	-0.0005

**Fonte:** Elaboração própria.

A figura 4 mostra o gráfico com o excesso de retorno acumulado para as diferentes estratégias de otimização, além da estratégia 1/N e o índice da bolsa de valores de São Paulo

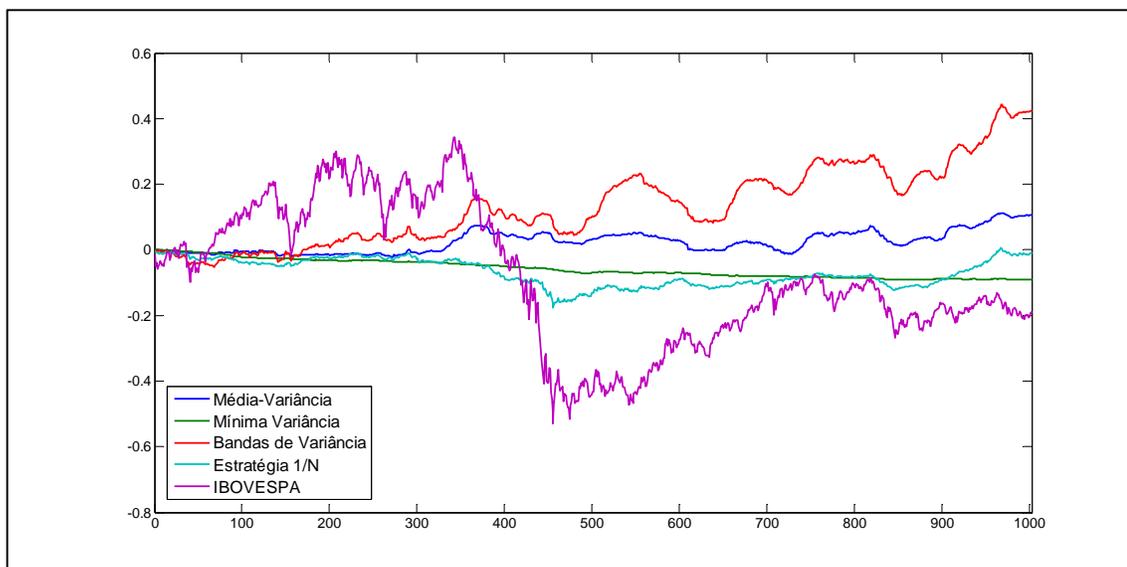
(IBOVESPA) ao longo de todo o período estudado para o modelo amostral de estimação da matriz de covariâncias. O gráfico corrobora os dados das médias e permite uma visão mais clara do comportamento de cada estratégia ao longo do tempo. Em termos de excesso de retorno acumulado percebe-se uma clara superioridade da estratégia de otimização por bandas de variância, seguida da estratégia de otimização por média-variância, auferindo um acumulado de mais de 100% no primeiro caso e mais de 40% no segundo (acima do retorno acumulado do ativo livre de risco).



**Figura 4 - Excesso de Retorno Acumulado para as estratégias de otimização por média-variância, mínima-variância e bandas de variância (Método Amostral de estimação da matriz de covariâncias), estratégia de alocação 1/N e IBOVESPA.**

**Fonte: Elaboração própria.**

A figura 5 mostra os retornos acumulados usando o modelo RiskMetrics™ para estimação das matrizes de covariâncias. Os resultados são análogos ao da figura 4, onde são mostrados os resultados com o modelo amostral para as covariâncias.



**Figura 5 - Excesso de Retorno Acumulado para as estratégias de otimização por média-variância, mínima-variância e bandas de variância (Método RiskMetrics™ de estimação da matriz de covariâncias), estratégia de alocação 1/N e IBOVESPA.**

**Fonte: Elaboração própria.**

Assim como na figura 4, verifica-se uma clara distinção de comportamentos entre os modelos que modelam a média (média-variância e banda de variância), sendo, portanto, estes superiores quando analisadas unicamente à luz dos excessos de retorno.

### 3.2.2 Variância

Os resultados dos cálculos das variâncias observadas para cada estratégia são expostos na tabela 2. Considerando a variância como *proxy* do risco para cada estratégia, é verificar um resultado semelhante para os dois modelos de estimação da matriz de covariâncias, de modo que a estratégia que mostrou-se mais conservadora foi a de mínima-variância (0,0001 e 0,0008 respectivamente para o modelo Amostral e o modelo RiskMetrics™ de estimação das covariâncias). Em contrapartida, os números mais elevados para a variância da carteira foram apresentados pela estratégia de bandas de variância, sendo que no modelo Amostral de estimação das covariâncias verificou-se um resultado de 0,1814 e no modelo RiskMetrics™ 0,1300. A estratégia da média-variância apresentou um resultado intermediário em relação ao

risco, 0,0422 e 0,0316 para, respectivamente o modelo Amostral e o RiskMetrics™ de estimação da matriz de covariâncias.

**Tabela 2 – Variância para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

Variância	Matriz de Covariâncias	
	Amostral	RiskMetrics™
<b>Markowitz (média-variância)</b>	0.0422	0.0316
<b>Mínima-Variância</b>	0.0001	0.0008
<b>Bandas de Variância</b>	0.1814	0.1300
<b>1/N</b>	0.0986	0.0986

Fonte: Elaboração própria.

Interessante notar que a simples diversificação utilizada na estratégia 1/N mostrou-se também pouco atrativa em relação ao risco, indicando que a utilização de modelos quantitativos para alocação pode efetivamente ser mais eficiente do que estratégias ingênuas.

### 3.2.3 Índice de Sharpe

Na tabela 3 são apresentados os resultados dos cálculos do Índice de Sharpe para cada estratégia. Os maiores retornos ajustados ao risco foram evidenciados para a estratégia de média-variância e bandas de variância, pra todos os modelos de estimação da matriz de covariâncias. No modelo Amostral, obteve-se um Índice de Sharpe mais elevado para a estratégia de média-variância, ficando em segundo lugar a carteira otimizada por bandas de variância (0.1863 e 0.1760).

No caso do modelo RiskMetrics™ de estimação das covariâncias, a otimização por bandas de variância foi mais eficiente, auferindo um Índice de Sharpe igual a 0,0995, enquanto a carteira de média-variância obteve 0,0575.

**Tabela 3 – Índice de Sharpe para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

Índice de Sharpe	Matriz de Covariâncias	
	Amostrai	RiskMetrics™
<b>Markowitz (média-variância)</b>	0.1863	0.0575
<b>Mínima-Variância</b>	0.0671	-0.3336
<b>Bandas de Variância</b>	0.1760	0.0995
<b>1/N</b>	-0.0016	-0.0016

**Fonte:** Elaboração própria.

A estratégia 1/N e a carteira otimizada por mínima-variância apresentaram resultados inferiores, mostrando retorno ajustado ao risco pouco atrativo quando comparados com as demais estratégias.

### 3.2.4 *Turnover da carteira*

A tabela 4 mostra o *turnover* da carteira produzido por cada estratégia aplicada. Percebe-se uma rotatividade elevada das posições nas carteiras otimizadas por média-variância e bandas de variância para ambos os modelos de estimação das matrizes de covariâncias. No modelo amostral, a estratégia de bandas de variância mostrou um *turnover* de 0,0884 e a carteira de média-variância, 0,0718, ou seja, a cada período houve um rebalanceamento de 8,84% das posições no primeiro caso e 7,18% no segundo. Já a estratégia de otimização por mínima-variância apresentou resultado muito próximo de zero (0,0006), indicando que apenas 0,06% da carteira sofriam alterações em média, a cada período.

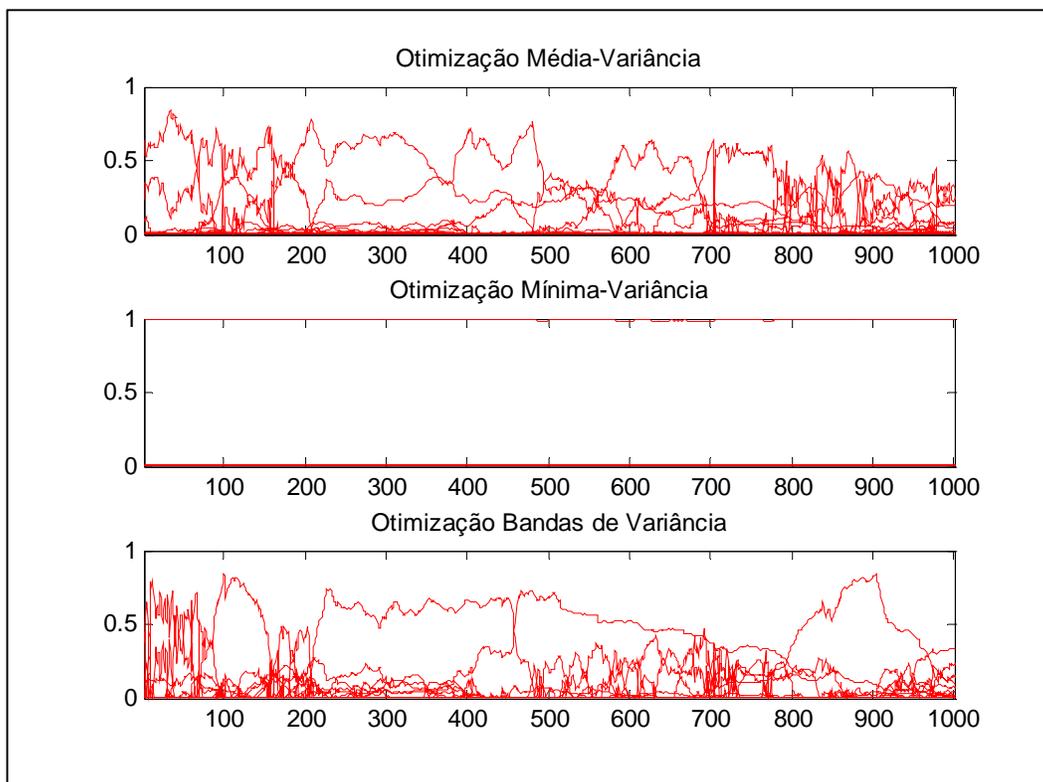
O modelo RiskMetrics™ mostrou resultados ainda mais elevados para o giro das posições em carteira, com 15,61% de *turnover* no caso de média-variância e 15,90% a cada período para a estratégia de bandas de variância. A carteira de mínima variância mostrou *turnover* de 3,80% a cada período.

**Tabela 4 – *Turnover* para diferentes estratégias de otimização e diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias.**

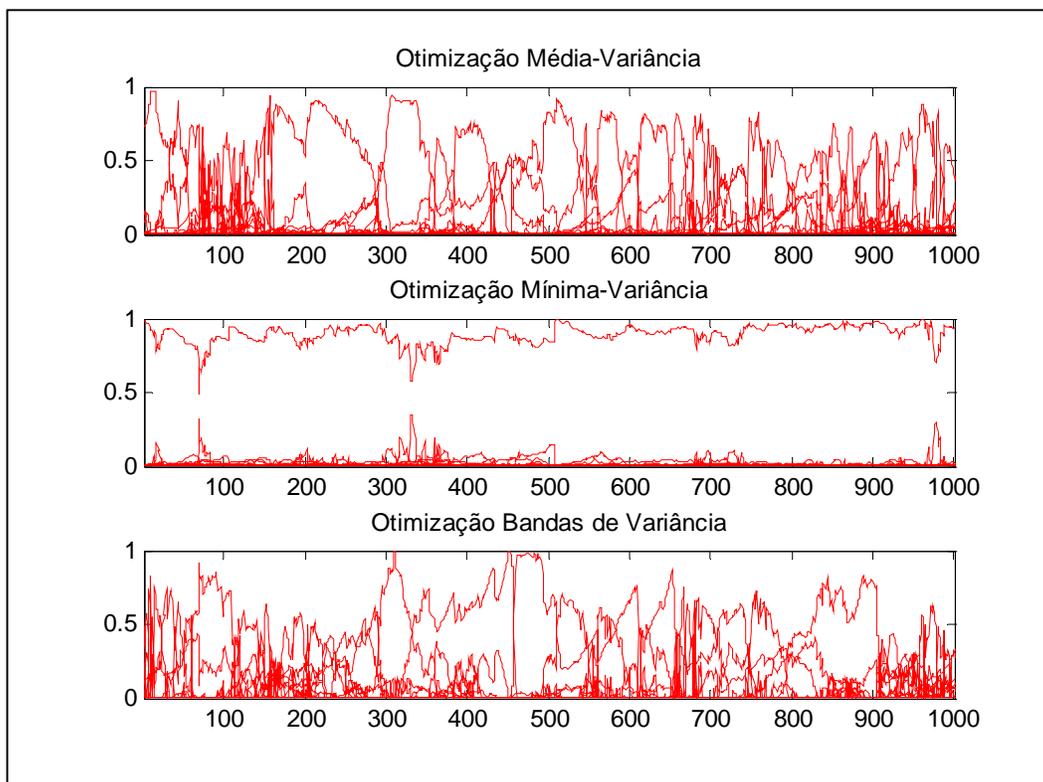
<i>Turnover</i>	Matriz de Covariâncias	
	Amostrai	RiskMetrics™
<b>Markowitz (média-variância)</b>	0.0718	0.1561
<b>Mínima-Variância</b>	0.0006	0.0380
<b>Bandas de Variância</b>	0.0884	0.1590
<b>1/N</b>	0.0069	0.0069

**Fonte:** Elaboração própria.

As figuras 5 e 6 mostram as variações nos pesos dos ativos em carteira ao longo do tempo para as diferentes estratégias de otimização aplicadas. É possível observar que, apesar de apresentarem elevados retornos, tanto em termos absolutos como ajustados ao risco, as estratégias de otimização por média-variância e por bandas de variância produziram carteiras pouco estáveis ao longo do tempo, justificando o elevado *turnover* calculado. Em contrapartida, a carteira de mínima variância fica praticamente estável ao longo do tempo, indicando uma provável maior facilidade para implementação da estratégia e menores custos.



**Figura 5 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo amostral para estimação da matriz de covariâncias.**



**Figura 6 - Pesos dos ativos da carteira variando ao longo do tempo para os modelos de otimização por média-variância, mínima variância e bandas de variância. Modelo RiskMetrics™ para estimação da matriz de covariâncias.**

## 4 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou comparar estratégias de otimização de carteiras com o intuito de identificar uma alternativa que seja mais adequada ao mercado brasileiro.

Para que fosse realizada a comparação, optou-se por utilizar um conjunto de opções de investimento contendo ativos líquidos e índices de mercado que possibilitassem a um gestor de carteiras a construção de um portfólio diversificado.

A alternativa escolhida foi o emprego de três estratégias de otimização (Média-Variância, Mínima-Variância e Bandas de Variância) associadas a dois diferentes métodos de estimação da matriz de variâncias e covariâncias (métodos Amostral e RiskMetrics™).

Verificou-se que, para a amostra utilizada, a aplicação do modelo que restringe limites para a variância (Bandas de Variância), apesar de não encontrado na literatura, foi capaz de produzir resultados atrativos para os ativos do estudo em termos de excesso de retornos absolutos e ajustados ao risco, com o benefício de ser facilmente alterado para diferentes níveis de risco (banda superior), ou seja, adaptável ao perfil do investidor. Da mesma forma, o modelo de otimização por média-variância também apresentou resultados positivos nos diversos aspectos avaliados para os dados utilizados.

Por outro lado, a evidência de elevado *turnover* nos portfólios otimizados por essas estratégias, indica que deve haver certa cautela por parte do investidor para a aplicação prática dos modelos apresentados, uma vez que, associadas ao giro da carteira incidem custos de transação que podem deteriorar os resultados. Além disso, o elevado *turnover* também está associado à dificuldade de implementação em virtude do recorrente ajuste inexato devido aos tamanhos dos lotes negociados nos mercados reais e a baixa liquidez de lotes fracionários.

Para solucionar os problemas acarretados pelo elevado *turnover*, sugere-se a aplicação de modelos alternativos para estimação das matrizes de variâncias e covariâncias. Estudos como o de Santos (2010), sugerem que a aplicação de estimadores robustos implica em redução de *turnover* da carteira já que estes modelos reconhecem explicitamente que o resultado de um processo de estimação não é um ponto, mas um conjunto incerto onde a verdadeira média e variância incidem com certo grau de confiança.

## REFERÊNCIAS

- ALARCON, C. M. **Avaliação de modelos de *Value-at-Risk* para ações**. 2005. 144f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis**. John Willey & Sons, 2008.
- BAUSYS, M. **The Performance of Minimum Variance Portfolios in the Baltic Equity Markets** (March 31, 2009). Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1599709>>. Acesso em: 10/12/2010.
- BERNSTEIN, P. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. Rio de Janeiro, Campus, 1997.
- BRANDIMARTE, P. **Numerical Methods in Finance: a MatLab-based introduction**. Wiley Series in Probability and Statistics, 2002.
- CORNUEJOLS, G.; TÛTÛNCÛ, R. **Optimization Methods in Finance**. Cambridge, University Press, 2006.
- COSTA, F. **Desafio aos economistas**. Disponível em: <<http://www.eco.unicamp.br/artigos/artigo49.htm>>. Acesso em 15/11/2010.
- DANTAS, A. L. **Otimização multiperíodo por média-variância sem posições a descoberto em ativos de risco**. 2006. 67 p. (Mestrado) – ESCOLA POLITÉCNICA, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. (2009). **Portfolio selection with robust estimation**. *Operations Research, forthcoming*.
- DUARTE JÚNIOR, A. M. **Gestão de risco para fundos de investimentos**. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2005.
- FABOZZI, F.J.; FOCARDI S.M.; KOLM P.N. **Trends in Quantitative Finance**, CFA Institute monograph, 2006.
- FABOZZI, F., KOLM, P., PACHAMANOVA, D., FOCARDI, S. **Robust Portfolio Optimization and Management**, Wiley, New Jersey, 2007.
- FOCARDI, S.; FABOZZI, F. **The mathematics of financial modeling and investment management**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007. 778 p
- GARCIA, V. S. Gerenciamento de risco em instituições e o Novo Acordo de Capital. In: LEAL, R. ; VARGA, G. (org.). **Gestão de investimentos e fundos**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2006. 480 p. p. 53-76.

GOMES, J. R. Desafios na integração do controle de riscos em bancos brasileiros. In: Duarte Jr., A. M. & Varga, G. (org.). **Gestão de riscos no Brasil**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003. 833 p. p. 27-38.

GRANT, M. C.; BOYD, S. P. (2008). **Cvx: Matlab software for disciplined convex programming** (web page and software). Disponível em: <<http://stanford.edu/~boyd/cvx>>. Acesso em: 20/09/2010.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. (2003). **Risk Reduction in Large Portfolios**: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The Journal of Finance*, 58:1651–1684.

JORION, P. **Value-at-Risk** – A nova fonte de referência para o controle do risco de mercado. São Paulo: BM&F, 1998.

J.P.MORGAN & REUTERS. **RiskMetrics™** – Technical Document. New York, Fourth Edition, 1996.

KEYNES, J. M. **A Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda**. Editora Atlas, 1990. Original, 1936.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991. 270p

MARKOWITZ, H. **Portfolio selection**. *Journal of Finance*, p.p.77–91, 1952.

MICHAUD, R.; MICHAUD, R. **Efficient Asset Management**: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation. New York: Oxford University Press, 2008.

MOLLICA, M. A. **Uma avaliação de modelos de Value-at-Risk**: comparação entre métodos tradicionais e modelos de variância condicional. 1999. 92f. Dissertação (Mestrado em Economia), FEA-USP, São Paulo, 1999.

NABHOLZ, R. B.. **Seleção ótima de ativos multi-período com Restrições Intermediárias utilizando o critério de média variância**. 2006. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle – Escola Politécnica - USP.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

SANTOS, A. A. P. **The Out-of-sample Performance of Robust Portfolio Optimization**. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 8, p. 141-166, 2010.

SECURATO, J. R. **Cálculo financeiro das tesourarias**: bancos e empresas. 4. ed. São Paulo: Saint-Paul Editora, 2008.

VARGA, G.; LEAL, R.(org.). **Gestão de Investimentos e Fundos**. Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2006.